Толерантность математического мышления и систематизация логических теорий[1]

Сохранено с сайта: http://taras-shiyan.narod.ru.
E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

1. Очерк методологического мышления

В XX веке получила развитие новая культура мышления, часто называемая *методологическим мышлением*. Этот стиль мышления требует явного предварительного описания, фиксации мыслительного инструментария (знаковых средств, понятий, теоретических посылок, методов и т.п.). Это тот шаг, на котором исследователь *свободен* выбирать те или иные мыслительные средства. На следующем шаге эти выбранные средства накладываются на имеющийся эмпирический материал, и результат этой работы уже жестко зависит от выбранных средств. Если средства оказываются неадекватными имеющемуся материалу или нашим практическим целям, то необходимо вернуться назад, пересмотреть исходный инструментарий и снова осуществить процедуры мышления – осмысление материала с помощью пересмотренного инструментария. Процесс познания состоит в непрерывной смене этих шагов.

По всей видимости, первопроходцами здесь оказались математики и философы-скептики. Философы-скептики долго объясняли, что теоретические представления – не выводы из эмпирического материала, а умозрительные конструкции, формы мысли, принимаемые априорно и накладываемые затем на имеющийся чувственный, эмпирический материал.

Математики же первыми перестали считать, что исходные постулаты их науки фиксируют некоторые факты или безусловные истины. Они стали рассматривать математические утверждения не безусловно, а в их связи с некоторыми исходными посылками. Одним из пионеров такого мышления был русский математик из Казани Н.И. Лобачевский (1792-1856). В 20-х годах XIX века он построил новую теорию, заменив одну из аксиом евклидовой геометрии на утверждение, казавшееся не просто ложным, но и абсурдным. Всю свою жизнь он доказывал правомерность сделанного им мыслительного шага, и лишь спустя десятилетия математика доросла до нового стиля мышления.

Это произошло с выходом математики на методологический уровень. Новая область математики, изучавшая математику математическими средствами, получила название *исследований по основаниям математики*. Эти исследования с нарастающей силой шли, начиная со 2-ой половины XIX века, и привели к смене стиля не только математического, но и логического мышления. Новая математизированная логика отказалась от идеи, что прежние способы рассуждений (получившие название *классической логики*) – единственные правильные и допустимые. Для современной логики важно не соблюдение тех или иных «классических» законов, а наличие или отсутствие связи (логического следования) между выводами и принятыми ранее постулатами и способами рассуждения.

2. Математические предпосылки интеллектуальной терпимости и задача систематизации формальных теорий

Построение множества альтернативных логик (и ряд других открытий современной математики) создало реальную базу для развития интеллектуальной терпимости в математике, логике и других точного мышления. Но это породило и ряд специфических задач. В частности, задачи сравнения и систематизации формальных теорий и количественной оценки различных классов формальных теорий[2].

Формальная теория – *множество формул некоторого формального языка, замкнутое относительно некоторых правил вывода[3]. Элементы формальной теории называются ее теоремами.*

Наиболее перспективным в области систематизации формальных теорий мне представляется метод построения структурных описаний. Метод состоит в задании на множестве систематизируемых объектов некоторого отношения порядка, связывающего все систематизируемые объекты в единую структуру. Если на множестве систематизируемых объектов задано несколько таких отношений, связанных между собой, то получаем структурно-системное описание данного множества.

Порождаемые структуры удобно описывать с помощью графов. Достоинства и ограничения этого знакового средства – удобство и наглядность представления. При возрастании сложности графов их удобнее разбивать на подграфы.

Различные методы сравнения формальных теорий приводят, в конечном счете, к двум основным порядкам.

3. Сравнение формальных теорий по дедуктивной силе

Один из этих порядков тесно связан с самим понятием формальной теории: раз формальные теории – с некоторые множества, то они могут находиться в отношениях $\subseteq$, $\subset$, $=$. Но элементы формальных теорий – это ее теоремы, следовательно, эти экстенсиональные отношения соответствуют соотношению формальных теорий по дедуктивной силе:

- $T_1 \subset T_2$ – T_1 является подтеорией T_2 (T_2 – расширение T_1)[4];
- $T_1 = T_2$ (T_1 и T_2 – совпадают, т.е. «T_1» и «T_2» – имена одной и той же формальной теории).

Здесь существует один нюанс, связанный с отождествлением и различением графем и формул формальных языков. Например, приходится отождествлять знаки конъюнкции «$\wedge$» и «&», силлогистические формулы «ASP» и «SaP», «ESP» и «SeP», «ISP» и «SiP», «OSP» и «SoP» т.п.[5]

Разновидностью метода систематизации по дедуктивной силе является подход А.С. Карпенко, применяемый им для систематизации импликативных фрагментов

[2] Кроме формальных теорий, в математике построено много других теория-подобных объектов (ТПО), объектов, которые можно рассматривать как модели или проекты различных теорий: алгебры, исчисления, логические модели, логические матрицы и т.п. Здесь я ограничиваюсь рассмотрением только формальных теорий.

[3] Относительно правил вывода надо каждый раз уточнять конкретно. Обычно минимальным требованием выдвигают замкнутость относительно стандартных правил подстановки. Но для каких-то целей могут потребоваться и более слабые теории с ограниченными правилами подстановки.

[4] Выделяются различные случаи дедуктивных расширений, указывающих на их характер и способы получения: собственное / несобственное, консервативное / неконсервативное, существенное / несущественное.

[5] Иначе оказывается, например, что формальные теории, реализующие КЛВ (классическую логику высказываний) в языках со связками $\{\neg, \&\}$ и $\{\neg, \wedge\}$, даже не пересекаются.

пропозициональных логик. Метод состоит в построении решеток исчислений, т.е. формальные теории упорядочиваются косвенно. Строятся независимые аксиоматизации гильбертовского типа, при этом аксиомы подбираются так, что прибавление или исключение некоторой аксиомы дает нам новую теорию из нашей структуры (булева куба или булева каскада[6]). Эти конструкции образуют решетки не по множествам теорем, а по множествам аксиом при данной выбранной аксиоматизации. Принцип «решеточности» графа[7] закрывает перед нами многие эвристические, справочные, учебные возможности, предоставляемые «языком» графов. Отказ от требования решеточности графа расширяет наши возможности и позволяет в достаточно простых и элегантных схемах представлять соотношение достаточно большого числа объектов. Результаты, описанные Карпенко и представленные в виде многочисленных кубов и каскадов [Карпенко 1993, 1997, 1999a-b], можно объединить в одном графе, представляющем импликативные фрагменты основных пропозициональных теорий (рис. 1)[8].

Обозначения формул:

I. $p\to p$

B. $(q\to r) \to ((p\to q) \to (p\to r))$

C. $(p\to (q\to r)) \to (q\to (p\to r))$

C₁. $(p\to ((q\to r) \to s)) \to ((q\to r) \to (p\to s))$

W. $(p\to (p\to q)) \to (p\to q)$

K. $p\to (q\to p)$

K₁. $(p\to q) \to (r\to (p\to q))$

D. $((p\to q) \to q) \to ((q\to p) \to p)$

L. $((p\to q) \to (q\to p)) \to (q\to p)$

P. $((p\to q) \to p) \to p$

P₁. $(((p\to q) \to r) \to (p\to q)) \to (p\to q)$

X₃. $((((p\to q) \to q) \to p) \to r) \to (((((q\to p) \to p) \to q) \to r) \to r)$

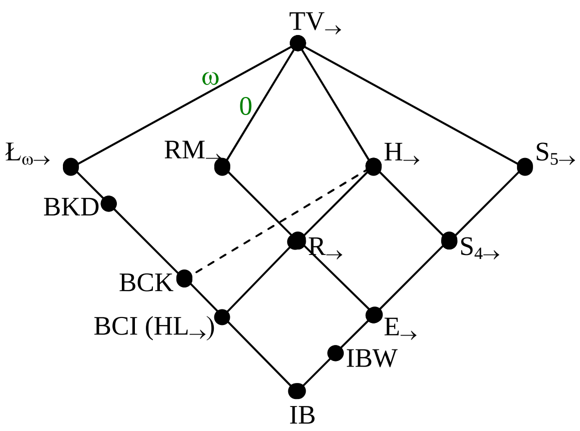

Рисунок 1. Классификация пропозициональных логик (по работам А.С. Карпенко).

Аксиоматики[9]:

$E_{\to} = IBWC_1$

$R_{\to} = IBWC$

$RM_{\to} = IBCWX_3$

$S_{4\to} = IBC_1WK_1$

$S_{5\to} = IBC_1WK_1P_1$

$H_{\to} = IBCKW = IBCK_1W$

$Ł_{\omega\to} = BKDL = BCKX_3$

$TV_{\to} = BCP = H_{\to} + P = R_{\to} + P$

---

[6] Последовательность булевых решеток, где единица одной решетки является нулем следующей [Карпенко 1999a].

[7] Требование, чтобы решетку образовывали вошедшие в граф теории.

[8] Граф представляет фрагмент решетки формальных теорий, направление связей – снизу вверх: от более слабых теорий к более сильным (стрелки не изображаются для простоты восприятия). Пунктирная линия ($BCK_{\to}$ – $H_{\to}$) такая же, как и все остальные. Пунктир показывает, что эта связь проведена в иной плоскости, чем ($R_{\to}$ – $RM_{\to}$), и не пересекается с ней на данном графе. Цифры и символы около связей обозначают «расстояние» между теориями: количество формальных теорий, находящихся на данном отрезке; ω – символ счетности класса промежуточных теорий.

[9] Как было сказано, вопрос о независимости аксиом в данном случае не имеет значения.

4. Сравнение по выразительным возможностям, классы эквивалентности и построение интенсиональной решетки

Второй из упомянутых порядков не экстенсионален. Он связан с информативностью, выразительными возможностями и т.п. формальных теорий. Этот порядок можно устанавливать различными методами, например, методами погружающих операций и дефинициальных расширений.

- $(T_1 \leq^* T_2) \Leftrightarrow$ (существует операция, погружающая T_1 в T_2 (т.е. $\exists\varphi\forall A(T_1 \vdash A \Leftrightarrow T_2 \vdash \varphi(A)))) \Leftrightarrow$ (T_1 дефинициально выразима в T_2).

Выявляемый порядок принципиально не строгий (в отличие от порядка по дедуктивной силе), он порождает интенсиональное отношение эквивалентности (=*) и разбивает множество формальных теорий на классы эквивалентности. Следовательно, это отношение не порождает решетки. Решетку образуют классы эквивалентности формальных теорий, причем, эта решетка не экстенсиональна: если S – некоторый класс эквивалентности ФТ, $T \in S$ и $S \setminus \{T\} \neq \varnothing$, то $S \neq S \setminus \{T\}$ (S и $S \setminus \{T\}$ – разные множества). Но при этом порядок остается тем же, т.е. объекты S и $S \setminus \{T\}$ будут претендовать на одно и то же место в решетке. Возникающие при формализации трудности можно было бы решить, ведя представление о множестве всех возможных формальных теорий и рассматривая классы эквивалентности на нем, но подобные объекты допустимы далеко не во всех метаматематических теориях. Другой путь был предложен в [Шиян 2002a-c], где вводился новый тип интенсиональных объектов и функция ⦃ ⦄, которая каждой формальной теории ставит в соответствие некоторый объект этого нового типа:

- ⦃T_1⦄ $\leq$ ⦃T_2⦄ $\Leftrightarrow T_1 \leq^* T_2$;
- ⦃T_1⦄ = ⦃T_2⦄ $\Leftrightarrow$ ⦃T_1⦄ $\leq$ ⦃T_2⦄ & ⦃T_2⦄ $\leq$ ⦃T_1⦄ (где = – обычное равенство, т.е. ⦃T_1⦄ и ⦃T_2⦄ – один и тот же объект);
- формальные теории входят в один и тот же класс эквивалентности (относительно "$\subseteq^*$") е.т.е. они являются различными реализациями одного и того же объекта этого нового типа.

Эти объекты характеризуют формальные теории по их выразительным возможностям, можно говорить об *информации*, которая, по-разному реализуясь в том или ином формальном языке, задает ту или иную формальную теорию. Эти объекты могут быть названы «информационными характеристиками», «интенсионалами» или «сущностями» соответствующих формальных теорий. Тем не менее, способ задания этих «интенсионалов» позволяет нам оперировать с ними и изучать их обычными экстенсиональными математическими средствами.

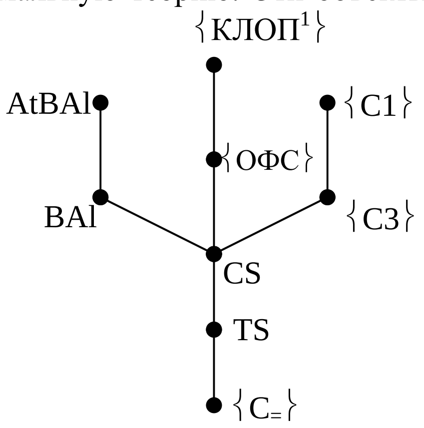

Рисунок 2. Фрагмент интенсиональной решетки.

На множестве формальных силлогистик и близких им теорий выделяются, например, следующие классы [Шиян 2002a][10]:

1. CS (классическая силлогистика): {С2, С3.1, ФС, КС, БС, С2V, ФВ, БВ, ФУ};
2. TS (традиционная силлогистика): {С4, С4В, У4};
3. Булева алгебра (BAl): {В, ВА, С2Д, ФСД};
4. Булева алгебра с атомами (AtBAl): {С2ДА, ЕО};

[10] Ниже использование знаков {} не означает, что перечисляются все элементы соответствующих классов. Указываются лишь некоторые из их элементов.

5. {С1$^+$, ОФС}[11].

На основании [Шиян 2000] можно выделить класс ТЕ (бескванторная теория эквивалентности), содержащий силлогистику $C_=$ (см. следующий раздел).

(TS < CS);
(BAl < AtBAl);
(ОФС < КЛОП^1)[12];
(CS < КЛОП^1).

Если С2Д – консервативное расширение С2, ФСД и ОФС – консервативные расширения ФС, то (CS < Bal) и (CS < {ОФС}).

При истинности этих утверждений получаем следующий граф (рис. 2).

С3 и С1 не погружаются в КЛОП^1 [Мчедлишвили 1986], теории из BAl, скорее всего, погружаются в КЛОП^1, так что этот граф носит предварительный характер и нуждается в проверке выдвинутых утверждений.

5. Построение счетного класса формальных силлогистик

В [Шиян 2000] рассматривались формальные силлогистики в стандартном языке[13] и было описано несколько собственных расширений С4, в частности, теория $C_= = C4 + (SiP \supset SaP)$, дефинициально эквивалентная бескванторной теории эквивалентности[14], и теория $C(2) = C_= + (SeM \wedge MeP \supset SaP)$. В [Шиян 2001] указывалось, что системе $C_=$ адекватна стандартная семантика для С4 с дополнительным требованием: $\forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P))$, а системе С(2) адекватна семантика для $C_=$ с дополнительным требованием $\forall S \forall P \forall Q(\varphi(S) = \varphi(P) \vee \varphi(S) = \varphi(Q) \vee \varphi(P) = \varphi(Q))$. В [Шиян 2002a] предложена идея построения счетного класса расширений $C_=$. Имеет место следующая теорема: $C_=$ имеет по крайней мере счетное число собственных расширений, отвечающих следующим требованиям:

a) теория получается добавлением к $C_=$ (к соответствующему исчислению) конечного числа аксиом;
b) теория имеет силлогистическую семантику стандартного типа (с конечным числом дополнительных семантических требований).

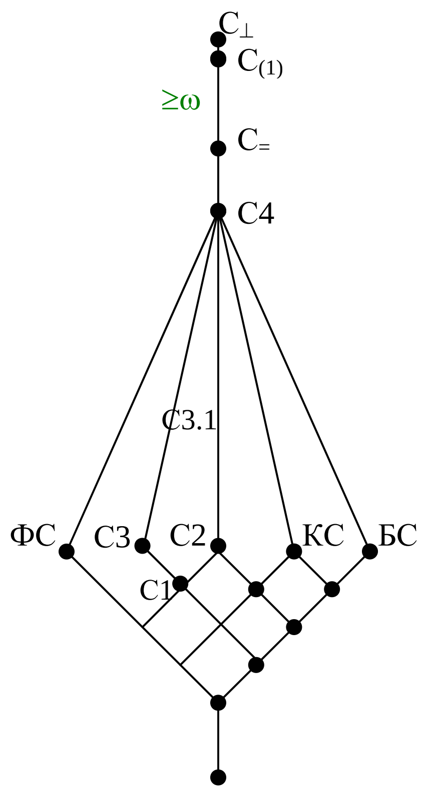

Рисунок 3. Силлогистики: соотношение по дедуктивной силе.

Рассмотрим алгоритм порождения теорий этого класса. Первая теория этого ряда $C_{(1)} = (C_= + SaP)$ является синтаксически полной теорией. Ей адекватна семантика для $C_=$ с дополнительным условием $\forall S \forall P(\varphi(S) = \varphi(P))$. Остальные теории рассматриваемого класса порождаются рядом последовательных

[11] Теории С1$^+$ и ОФС описаны в [Маркин 1991]. В [Шиян 2002a] они маркированы значком (1), чтобы различить их с другими одноименными теориями.

[12] КЛОП^1 – классическая логика одноместных предикатов первого порядка.

[13] Со всеми пропозициональными связками и силлогистическими константами a, e, i, o и бесконечным списком элементарных постоянных термов.

[14] В языке с пропозициональными связками, одним предикатом «=» и бесконечным списком элементарных постоянных термов.

ослаблений аксиомы SaP. Ослабления происходят по закону классической логики $A \Rightarrow (B \vee A)$. Рекурсивное определение этого ряда выглядит так:

$A_1 = S_1aS_2$;

...

$A_{n+1} = S_1aS_{n+2} \vee S_2aS_{n+2} \vee \ldots \vee S_{n+1}aS_{n+2} \vee A_n$, где $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$ – список всех терминов, входящих в A_n, и S_{n+2} – термин, не входящий в A_n;

...

Каждая теория $C_{(i)}$ порождаемого класса есть $(C_= + A_i)$. Иначе говоря, рассматриваемый класс есть множество $\{C_{(i)} / C_{(i)} = C_= + A_i\}$.

Для n=2 получаем: $S_1aS_3 \vee S_2aS_3 \vee S_1aS_2 \Leftrightarrow \neg(S_1eS_3) \vee \neg(S_3eS_2) \vee S_1aS_2 \Leftrightarrow (S_1eS_3 \wedge S_3eS_2) \supset S_1aS_2 \Leftrightarrow SeM \wedge MeP \supset SaP$, т.е. рассматривавшаяся ранее теория C(2) есть $C_{(2)}$.

Семантику для каждой теории $C_{(i)}$ получаем присоединением к семантике адекватной $C_=$ дополнительного семантического условия I_i. Для $C_=$ имеет место следующая эквивалентность: $|SaP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S)=\varphi(P)$. I_i получаем из характеристической аксиомы A_i путем эквивалентных преобразований с последующим введением кванторов общности по всем терминам $S_1, S_2, \ldots, S_{i+1}$ полученной формулы. Если $A_i = S_1aS_{i+1} \vee S_2aS_{i+1} \vee \ldots \vee S_iaS_{i+1} \vee S_1aS_i \vee \ldots \vee S_1aS_2$, то (по определению φ) получаем $|S_1aS_{i+1} \vee S_2aS_{i+1} \vee \ldots \vee S_iaS_{i+1} \vee S_1aS_i \vee \ldots \vee S_1aS_2|=1 \Leftrightarrow (\varphi(S_1)=\varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_2)=\varphi(S_{i+1}) \vee \ldots \vee \varphi(S_i)=\varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_1)=\varphi(S_i) \vee \ldots \vee \varphi(S_1)=\varphi(S_2))$. Отсюда имеем: $\models (S_1aS_{i+1} \vee S_2aS_{i+1} \vee \ldots \vee S_iaS_{i+1} \vee S_1aS_i \vee \ldots \vee S_1aS_2) \Leftrightarrow \forall S_1 \forall S_2 \ldots \forall S_{i+1}(\varphi(S_1)=\varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_2)=\varphi(S_{i+1}) \vee \ldots \vee \varphi(S_i)=\varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_1)=\varphi(S_i) \vee \ldots \vee \varphi(S_1)=\varphi(S_2))$.

Формула I_n говорит, что для любых n+1 терминов теории $C_{(n)}$ объемы по крайней мере двух терминов совпадают; иначе: модель теории содержит не более n объектов, которые можно приписывать в качестве значений терминам этой теории. Условие $\forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$ (при наличии $\forall S(\varphi(S) \neq \varnothing)$) естественно понимать как требование единичности объемов всех терминов теории, а I_n – как требование, чтобы предметная область содержала не более n объектов.

Литература

1. [Карпенко 1993] Карпенко А.С. Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993.
2. [Карпенко 1997] Карпенко А.С. Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997.
3. [Карпенко 1999a] Карпенко А.С. Булевы каскады импликативных логик // Смирновские чтения. 2 Международная конференция. М., 1999.
4. [Карпенко 1999b] Карпенко А.С. Импликации следования, строгая, релевантная, интуиционистская и классическая и их взаимоотношения // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
5. [Маркин 1991] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
6. [Мчедлишвили 1986] Мчедлишвили Л.И. Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.
7. [Смирнов 2001] Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: УРСС, 2001.
8. [Шиян 2000] Шиян Т.А. Классификация теорий чистой позитивной силлогистики // Электронный журнал Logical Studies. №4 (2000). www.logic.ru.
9. [Шиян 2001] Шиян Т.А. Классификация силлогистических теорий // Смирновские чтения. 3 Международная конференция. Москва, 2001.

10. [Шиян 2002a] Шиян Т.А. Методы классификации формальных теорий и множество силлогистик // Аспекты: Сборник статей по философским проблемам истории и современности. М.: Изд-во «Современные тетради», 2002.
11. [Шиян 2002b] Шиян Т.А. О работе по системному математическому описанию предмета современной символической логики // Человек – Культура – Общество. Актуальные проблемы философских, политологических и религиоведческих исследований. (Том II) М.: Изд-во «Современные тетради», 2002.
12. [Шиян 2002c] Шиян Т.А. Структурные классификации формальных теорий // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы VII Общероссийской научной конференции. 20-22 июня 2002. СПб., 2002.